

Messung von Impedanzen mit der Wheatstone-Brücke

Ziele

- Kennenlernen der Brückenschaltung
- Messung einiger Impedanzen mit einer Wechselspannungsbrücke

1 Grundlagen

1.1 Prinzip der Wheatstone-Brücke bei Gleichspannung und Ohmschen Widerständen

Die Brückenschaltung nach Wheatstone ermöglicht die Bestimmung von Widerständen durch Vergleich mit bekannten Normalwiderständen. Die elektrische Schaltung für Ohmsche Widerstände und Gleichspannung wird in Abbildung (1) dargestellt.

Die Brücke befindet sich im sogenannten **abgeglichenen Zustand**, wenn kein Strom durch das Messinstrument NI fließt. Das bedeutet, dass die Spannung zwischen C und D gleich null ist. Da es die alleinige Aufgabe des Instruments ist, „null“ anzuzeigen, wird es **Nullinstrument** genannt. Daher ist auch klar, dass das NI nicht kalibriert zu sein braucht. Jedoch sollte es möglichst empfindlich sein.

Im abgeglichenen Zustand ist der Strom durch R_1 gleich dem durch R_2 ; er soll I_{oben} genannt werden, da er durch den **oberen Arm** der Brücke fließt. Entsprechendes gilt für I_{unten} des **unteren Armes**.

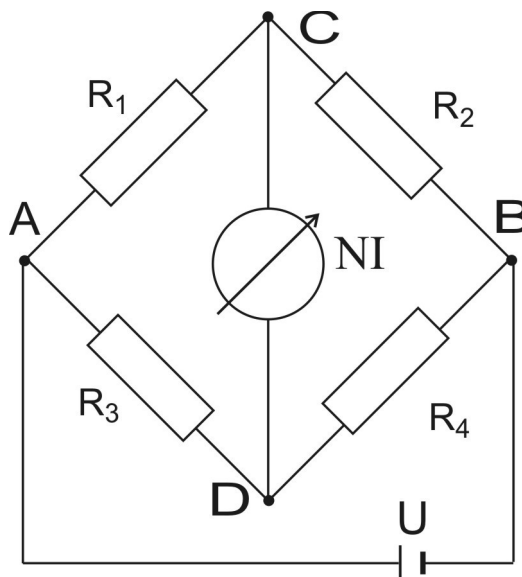


Abbildung 1: Brückenschaltung nach Wheatstone für Ohmsche Widerstände und Gleichspannung. Die eigentümliche Anordnung der Widerstände hat keine weitere Bedeutung, außer dass man so am wenigsten zeichnen muss. Das Messinstrument NI wird Nullinstrument genannt (siehe Text).

Ebenso gilt im abgeglichenen Zustand wegen $U_{CD} = 0$

$$U_{AC} = U_{AD} \text{ und auch } U_{BC} = U_{BD} . \quad (1)$$

Die Spannung, die an ohmschen Widerständen abfällt, ist bekanntlich $U = R \cdot I$. Damit wird aus Gleichung (1)

$$R_1 \cdot I_{\text{oben}} = R_3 \cdot I_{\text{unten}} \quad \text{und} \quad R_2 \cdot I_{\text{oben}} = R_4 \cdot I_{\text{unten}} . \quad (2)$$

Durch Elimination der Stromstärken in Gleichung (2) erhält man die **Abgleichbedingung**

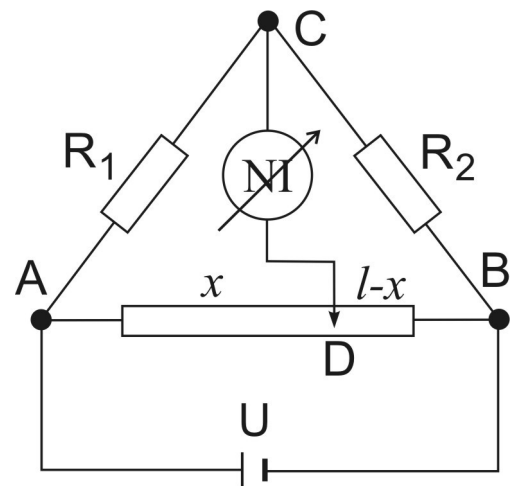
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} . \quad (3)$$

R_1 lässt sich also messen, wenn R_2 und der Quotient R_3/R_4 der beiden Widerstände R_3 und R_4 bekannt sind. Um die Brücke für verschiedene Widerstände R_1 abgleichen zu können, muss entweder R_2 oder der Quotient R_3/R_4 veränderbar sein. An die Stelle der Widerstände R_3 und R_4 kann auch ein Widerstandsdraht der Länge l mit Schleiferabgriff¹ treten, und man erhält die in Abbildung (2) gezeigte Anordnung.

Der Quotient R_3/R_4 entspricht bei homogenem Schleifdraht nun einfach dem Längenverhältnis $\frac{x}{l-x}$, sodass schließlich gilt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{l-x} . \quad (4)$$

Abbildung 2: Die Wheatstone-Brücke mit Schleifdraht. Der Schleifer macht an der Stelle x im Punkt D Kontakt mit dem Schleifdraht der Länge l .



Diese Zurückführung der Widerstandsmessung auf eine Längenmessung funktioniert natürlich nur dann in der dargestellten Weise, wenn der Schleifdraht homogen ist. Auf die Qualität des Schleifkontaktes kommt es hingegen nicht an, ebenso wenig, wie schon erwähnt, auf die absolute Genauigkeit des NI, und auch die Konstanz der verwendeten Spannungsquelle U ist unerheblich. Daher zählen Wheatstonesche Brücken auch heute noch zu den zuverlässigsten Ohmmetern².

1.2 Wheatstone-Brücke und Wechselspannung, Messung von Impedanzen

Verwendet man statt der Gleichspannung eine Wechselspannung, so können mit einer Wheatstone-Brücke nach Abbildung (1) auch Kapazitäten und Induktivitäten gemessen werden, wenn man diese anstelle des zu messenden Widerstandes R_1 einbaut. Um dies zu sehen und die Abgleichbedingung

¹ Eine solche Anordnung heißt Potentiometer, beachten Sie das Ausstellungsstück am Experiment.

² Ein weiterer interessanter und messtechnisch häufig genutzter Aspekt der Brückenschaltung ist ihre hohe Empfindlichkeit für Abweichungen aus dem abgeglichenen Zustand. Dies wird am Ende des Versuchs qualitativ untersucht (Aufgabe 2.5).

für Wechselspannung allgemein zu studieren, muss man sich zunächst an die Wechselstromgesetze erinnern.

Wie Ihnen bekannt sein sollte, kann im Falle von Wechselstrom $I_{\approx}$ und Wechselspannung $U_{\approx}$ der einfache Zusammenhang $U_{\approx} = Z \cdot I_{\approx}$ etabliert werden, wenn man diese Größen als komplexe Zahlen ansetzt. Der „komplexe Widerstand“ Z wird auch **Impedanz** genannt.

Für die Bauteile ohmscher Widerstand R , Spule der Induktivität L und Kondensator der Kapazität C gilt in dieser Reihenfolge $Z = R; \quad i\omega L; \quad -\frac{i}{\omega C}$. Für Kombinationen dieser Bauteile gelten dieselben Regeln wie bei den Kirchhoffschen Gesetzen der Gleichstromlehre, also z. B. für eine Serienschaltung von ohmschem Widerstand und Spule $Z = R + i\omega L$. Beim Rechnen mit den Z benutzt man häufig mit großem Vorteil die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen, im letzten Beispiel $Z = |Z| \cdot \exp(i\varphi) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \exp(i\varphi)$ mit $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$. Der Winkel φ entspricht der Phasenverschiebung zwischen $U_{\approx}$ und $I_{\approx}$.

Auf den genannten Zusammenhängen beruht auch die Möglichkeit, die Wechselstromgesetze mittels der sogenannten **Zeigerdiagramme** zu behandeln. Dies soll hier nicht weiter ausgeführt, sondern auf entsprechende Lehrbücher verwiesen werden. Wenn Ihnen einzelne Grundlagen nicht geläufig sind, sollten Sie sich diese unbedingt durch Heranziehen entsprechender Quellen aneignen. Die betreffenden Ideen und Argumentationstechniken sind nicht nur hier von Bedeutung sondern kehren in der Physik immer wieder.

Für die Betrachtung der **Abgleichbedingung im Wechselstromfall** werden die in Abbildung (1) vorhandenen Widerstände R_1 bis R_4 durch Impedanzen Z_1 bis Z_4 und U durch $U_{\approx}$ ersetzt. Damit das NI Null anzeigt, darf genau wie im Gleichstromfall kein Strom durch das NI fließen. Somit resultieren wiederum die für die jeweiligen Brückenarme gültigen Ströme $I_{\approx, \text{oben}}$ und $I_{\approx, \text{unten}}$ einführen. Damit Abgleich herrscht, muss auch nach wie vor zu jedem Zeitpunkt die Gleichung (1) gelten. Folglich modifizieren sich die Gleichungen (2) zu

$$Z_1 \cdot I_{\approx, \text{oben}} = Z_3 \cdot I_{\approx, \text{unten}} \quad \text{und} \quad Z_2 \cdot I_{\approx, \text{oben}} = Z_4 \cdot I_{\approx, \text{unten}},$$

woraus die der Gleichung (3) entsprechende Bedingung

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad (5)$$

folgt. Natürlich geht dieser Zusammenhang in Gleichung (3) über, wenn alle Z rein ohmscher Natur sind.

Die neue Abgleichbedingung sieht auf den ersten Blick nach einer trivialen Erweiterung aus, ist aber in Wahrheit doch ein wenig komplizierter, da die Impedanzen komplexe Zahlen sind. Gleichung (5) verlangt nämlich die Gleichheit von Real- und Imaginärteil oder von Betrag und Winkel (der Exponentialdarstellung) auf beiden Seiten, also

$$\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{|Z_3|}{|Z_4|} \quad \text{und} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 . \quad (6)$$

Es liegen somit zwei simultan zu erfüllende Abgleichbedingungen vor.

An den Gleichungen (6) erkennt man, dass nicht für jede beliebige Zusammenstellung von Z ein Abgleich möglich ist. Sind beispielsweise Z_3 und Z_4 Ohmsche Widerstände, etwa wie im Fall des Schleifdrahtes, siehe Abbildung (2), so liegt $0 = \varphi_3 = \varphi_4$ vor (keine Phasenverschiebung für $Z = R$), weshalb nach Gleichung (6) auch $\varphi_1 = \varphi_2$ gelten muss. Letztere Bedingung wird man nicht erreichen können, wenn zum Beispiel Z_1 zur einer Spule und Z_2 zu einem Kondensator gehört. Man muss im Einzelfall untersuchen, ob ein Abgleich möglich ist oder nicht.

Im nun folgenden Abschnitt wird ein konkreter Fall erläutert, der auch im Experiment untersucht wird.

1.3 Abgleichbedingung für eine reale Spule als Z_1

Eine reale Spule entspricht bekanntlich im Ersatzschaltbild einer Serienschaltung von idealem R und L . Zur Messung einer Spule ist daher im Experiment die Schaltung nach Abbildung (2) entsprechend folgender Abbildung (3) zu modifizieren.

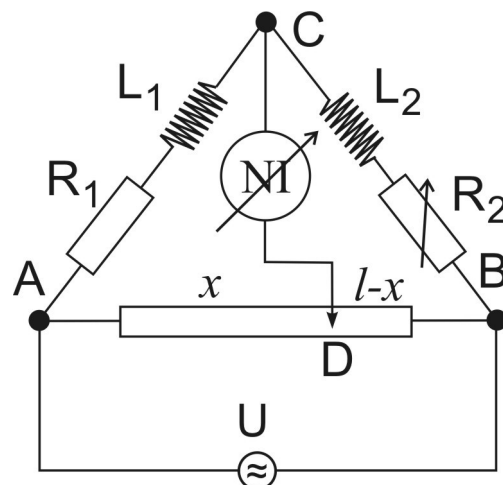


Abbildung 3: Wechselspannungsfall. Wheatstone-Brücke mit Schleifdraht im unteren und Widerstände mit Spulen im oberen Arm. Es ist zu beachten, dass R_2 verstellt werden kann (Pfeilsymbol stammt aus der E-Technik). R_1 und R_2 können ganz oder teilweise innere Widerstände der Spule sein.

Aus der Phasenwinkelbedingung im Gleichungssatz (6) folgt dass $\varphi_1 = \varphi_2$ gelten muss, wie am Ende letzten Abschnitts erläutert wurde.

Folglich muss auch $\tan \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}$ gleich sein mit $\tan \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}$, weshalb gelten muss

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2} . \quad (7)$$

Setzt man nun in Gleichungssatz (6) für $\frac{|Z_3|}{|Z_4|}$ das Schleifdrahtverhältnis $\frac{x}{l-x}$ und für $\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ die expliziten Ausdrücke für die RL -Serienschaltungen ein, so ergibt sich

$$\sqrt{\frac{R_1^2 + (\omega L_1)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} = \frac{x}{l-x} . \quad (8)$$

Wenn man links im Zähler R_1 und im Nenner R_2 jeweils vor die Wurzel zieht, so sieht man wegen Gleichung (7), dass die Wurzel gleich 1 ist. Damit folgt aus der zweiten Bedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{l-x} . \quad (9)$$

Die Gleichungen (7) und (9) können durch Variation von x und R_2 immer erfüllt werden, sodass L_1 und R_1 sich bestimmen lassen, wenn L_2 und R_2 bekannt sind.

1.4 Abgleichbedingung für einen realen Kondensator als Z_1

Ein realer Kondensator entspricht bekanntlich im Ersatzschaltbild einer Parallelschaltung von idealem R und C . Wird ein solcher Kondensator als Z_1 in die Brücke nach Abbildung (3) eingebaut, so muss auch L_2, R_2 durch eine Parallelschaltung aus einem bekannten Kondensator C_2 und einem einstellbaren Widerstand R_2 ersetzt werden. Andernfalls könnte, wie bereits erwähnt, die Abgleichbedingung für die Phasenwinkel nicht erfüllt werden.

Wegen der Parallelschaltung rechnet man hier am einfachsten mit den reziproken Impedanzen

$\frac{1}{Z_{1,2}} = \frac{1}{R_{1,2}} + i \omega C_{1,2}$. Bedenkt man nun noch, dass in der Exponentialdarstellung der Kehrwert einer komplexen Zahl ganz einfach durch $\frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|} \cdot \exp(-i \varphi)$ gegeben ist, so kann man auf ähnlichem Weg wie im letzten Abschnitt mit der allgemeinen Abgleichbedingung (5) die Bedingungen

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 \quad \text{und} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{l-x} \quad (10)$$

herleiten.

Da bei den in der Technik verwendeten Kondensatoren der Parallelwiderstand sehr groß ist („verlustfreier Kondensator“), kann man R_1 und R_2 auch näherungsweise weglassen. Dann findet man mit $|Z_{1,2}| = \frac{1}{\omega C_{1,2}}$ sofort die Abgleichbedingung

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{x}{l-x} . \quad (11)$$

Die Winkelbedingung wird nicht benötigt.

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 Vorüberlegung (vor dem Versuch durchzuführen)

In welchem Teilbereich des Schleifdrahtpotentiometers können Ohmsche Widerstände R_1 am genauesten ermittelt werden, wenn sie gemäß Gleichung (4) bestimmt werden? Geben Sie das optimale x an, indem Sie eine mathematische Diskussion des Fehlers von R_1 durchführen. Achten Sie dabei darauf, dass die Größe von R_2 nicht in die Argumentation eingeht (Tipp: Relativer Fehler!).

2.2 Messung einfacher bekannter Widerstände

Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung (2) mit den unten genannten bekannten Widerständen auf. Als Spannungsquelle dient entgegen der Zeichnung ein Wechselspannungsgenerator³. Am Generator stellen Sie eine Frequenz zwischen 300 Hz und 800 Hz ein. Das Schleifdrahtpotentiometer besitzt eine Skala mit einer Längeneinteilung 0 cm – 100 cm, mit der Sie das Verhältnis $x/(l-x)$ bestimmen können. Als Nullinstrument dient ein Drehspulmultimeter mit vorgeschaltetem Verstärker, welches an den Schleifer und an Punkt C angeschlossen wird.

Stellen Sie für folgende Fälle jeweils den Brückenabgleich her, indem Sie den Schleifer solange verschieben, bis das Brückeninstrument ein Minimum anzeigt.

- a) R_1 und $R_2 = 200 \Omega$
- b) $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$
- c) $R_1 = 100 \Omega$, R_2 : zwei 200Ω -Widerstände parallel geschaltet
- d) $R_1 = 100 \Omega$, R_2 : zwei 200Ω -Widerstände in Serie geschaltet.

Vergleichen Sie die in a) bis d) gemessenen Verhältnisse $x \cdot (l-x)^{-1}$ mit den aus den Widerstandsdaten zu erwartenden. Diskutieren Sie die Fehler unter Berücksichtigung der Vorüberlegung im letzten Abschnitt.

2.3 Messung des Widerstandes eines Drahtes

Ersetzen Sie den Widerstand R_2 durch einen veränderlichen Widerstand, welcher aus zwei hintereinander geschalteten Widerstandsdekaden $0 \dots 10 \cdot 1 \Omega$ und $0 \dots 10 \cdot 0,1 \Omega$ gebildet wird. An die Stelle von R_1 tritt ein Draht (ca. Länge $L = 1 \text{ m}$), der sich neben anderen auf einer Klemmleiste befindet. Ziel ist die Messung seines **spezifischen Widerstandes**.

³ Aus den Ausführungen im letzten Abschnitt folgt, dass sich auch ohmsche Widerstände mit Wechselspannung messen lassen.

Überlegen Sie sich ein Verfahren zur Brückenabstimmung, welches das Ergebnis Ihrer Vorüberlegung berücksichtigt. Wo positionieren Sie den Schleifer zu Anfang und wie stellen Sie R_2 ein?

Ermitteln Sie die Drahtlänge und den Durchmesser des Drahtes, und berechnen Sie seinen spezifischen Widerstand. Wie groß ist der relative Fehler? Messen Sie den spezifischen Widerstand eines weiteren Drahtes der Leiste. Geben Sie bei den Endergebnissen die Kennzeichnung der Klemmleiste und die Nr. des zugehörigen Drahtes an. Diskutieren Sie durch Vergleich mit Literaturwerten, um welche Legierungen es sich handeln könnte.

2.4 Messung einer Induktivität

Es soll nun mit zwei Spulen die Schaltung nach Abbildung (3) aufgebaut werden, wobei von einer Spule die Größen R_g und L_g bekannt sind, nämlich von der grauen Spule der Firma „PHYWE“. Die Widerstandsdekaden sollen zum veränderlichen R_2 beitragen. Als zweites soll die Spule nicht bekannter Induktivität $L_{\text{unbekannt}}$ in die Schaltung eingebaut werden. Skizzieren Sie Ihre Schaltung.

Durch abwechselndes Verändern von $x \cdot (l-x)^{-1}$ und R_2 sollen Sie den bestmöglichen Abgleich erreichen. Ermitteln Sie daraus den ohmschen Widerstand und die Induktivität der unbekannten Spule. Geben Sie die relativen Fehler an.

2.5 Abgegliche Brücke als Sensor

Halten Sie bei abgeglichener Brücke den Schleifer gedrückt und nähern Sie einen Gegenstand aus Stahl (Eisen) der Öffnung der Spule $L_{\text{unbekannt}}$. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und erklären Sie den Sachverhalt unter physikalischen Aspekten.