| | | |
|---|---|---|
| UNIVERSITÄT OSNABRÜCK | **Physik-Probestudium** | V 03 |
| | ***Trägheitsmomente*** | Schnieder |
| Fachbereich 06 | | 18.12.24 |

# Trägheitsmomente

## *Ziele*

- Beobachtung von Drehschwingungen
- Bestimmung von Trägheitsmomenten
- Verifizierung und Anwendung des Steinerschen Satzes

# 1 Grundlagen

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers *K*, bezogen auf eine Drehachse *A*, ist durch

$$I_{\mathrm{A}} = \int_K r^2 \, dm \tag{1}$$

definiert. Falls Ihnen dieser Begriff nicht geläufig ist, müssen Sie ein Lehrbuch zu Rate ziehen. Das Trägheitsmoment $I_{\mathrm{A}}$ lässt sich mit Hilfe von Drehschwingungen des Körpers um die betreffende Achse ermitteln. Dies stellt die physikalische Versuchsgrundlage dar.

## 1.1 Das Drehpendel

In diesem Versuch werden Trägheitsmomente einiger Körper über die Schwingungsdauer von Drehschwingungen gemessen.

Der Probekörper wird dazu auf einer Drehachse befestigt, die mit einer Spiralfeder (ähnlich der Unruhe einer mechanischen Uhr) an ein ortsfestes Stativ gebunden ist. Abbildung (1) zeigt den prinzipiellen Aufbau.

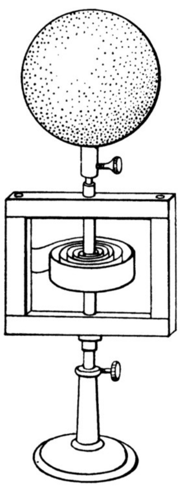

*Abbildung 1: Senkrecht stehende Drehachse mit Kugel als Probekörper. Aus Pohl, Physik, Band 1, Springer-Verlag, von R. W. Pohl als „Drillachse“ bezeichnet. Ein Ende der Spiralfeder ist am Stativ, das andere an der Achse befestigt.*

Die Position der Achse und damit auch des Probekörpers wird durch den Drehwinkel $\Phi$ gegen die Ruhelage beschrieben. Dieser kann auf einer Winkelskala auf einer Aluminium-scheibe abgelesen werden, welche senkrecht auf der Achse montiert wird. Das Gebilde aus Drehachse und Scheibe mit Winkelskala wird auch Drehtisch genannt.

Zum Herausdrehen aus der Ruhelage wird ein Drehmoment $\vec{M}$ parallel zu Drehachse benötigt, welches durch eine an der Scheibe oder an einem Probekörper im Abstand $r$ von der Drehachse angreifende Kraft $\vec{F}$ erzeugt wird,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} . \tag{2}$$

Durch die Spiralfeder wirkt dem auslenkenden Drehmoment ein rücktreibendes Drehmoment entgegen, dessen Betrag gegeben ist durch

$$M = D_{\Phi} \Phi . \tag{3}$$

$D_{\Phi}$ heißt **Winkelrichtgröße**. Beachten Sie die Analogie zum Hookeschen Gesetz bei einer linearen Feder.

Durch einmaliges Auslenken des Körpers aus seiner Ruhelage und Loslassen wird dieser in harmonische Drehschwingungen versetzt. Bei vernachlässigbarer Dämpfung ist die Schwingungsdauer $T$ gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\mathrm{A}}}{D_{\Phi}}} . \tag{4}$$

Dabei bezeichnet $I_{\mathrm{A}}$ das Trägheitsmoment des Körpers um die Drehachse. Die Herleitung dieser Gleichung geschieht genau wie bei der entsprechenden Beziehung für ein lineares Federpendel durch Lösung der Bewegungsgleichung, was Ihnen bereits geläufig sein sollte.

Bei bekannter Winkelrichtgröße lässt sich also das Trägheitsmoment aus der gemessenen Schwingungsdauer berechnen. Dies stellt das Messprinzip in diesem Versuch dar.

Für einfache rotationssymmetrische Körper kann man das Trägheitsmoment aber auch aus der Masse und den Körperabmessungen berechnen (siehe Lehrbuch). Man erhält:

| | | |
|---|---|---|
| Kreisscheibe, Achse $\perp$ zur Fläche | $I_{\mathrm{Sch}\perp} = 1/2\, m R^2$ | (5) |
| (flache) Kreisscheibe, Achse in der Fläche | $I_{\mathrm{Sch}\parallel} = 1/4\, m R^2$ | (6) |
| Kugel | $I_{\mathrm{K}} = 2/5\, m R^2$ | (7) |
| Hohlzylinder, Achse gleich Zylinderachse | $I_{\mathrm{Hz}} = 1/2\, m \left(R_{\mathrm{a}}^2 + R_{\mathrm{i}}^2\right)$ | (8) |

Das Trägheitsmoment des Hohlzylinders bezieht sich auf eine Drehachse, welche mit der Zylinderachse identisch ist. Es bezeichnet $m$ die jeweilige Masse des Körpers, $R$ den Radius der Scheibe bzw. Kugel, $R_{\mathrm{a}}$ und $R_{\mathrm{i}}$ den Außen- bzw. Innenradius des Hohlzylinders. Da das

Trägheitsmoment additiv aufgebaut ist, siehe Gleichung (1), ist ohne Weiteres klar, dass das Trägheitsmoment $I_{\mathrm{Zyl}}$ eines Vollzylinders bei Drehung um seine Zylinderachse ebenfalls durch die Formel für $I_{\mathrm{Sch}\perp}$ beschrieben wird.

Bei geometrisch einfachen Körpern mit mehreren Symmetrieachsen (z. B. Quader) kann man für jede Symmetrieachse ein Trägheitsmoment analytisch angeben. Für Drehungen um beliebige andere Achsen oder für Körper komplizierter Form ergibt sich immer ein anderes Trägheitsmoment. Wie Sie spätestens in einer Vorlesung zur theoretischen Mechanik lernen werden, kann man immer genau 9 körperspezifische Größen[1] finden, mit denen sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse berechnen lässt. In der Praxis führt man heutzutage in solch einem Fall jedoch computernummerische Berechnungen von $I_A$ mittels Gleichung (1) durch.

## 1.2 Der Steinersche Satz

Ein bisweilen für die Praxis wichtiger Fall wird im Folgenden beschrieben: Zwischen dem Trägheitsmoment $I_{\mathrm{s}}$ eines Körpers der Masse *m* in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse und dem Trägheitsmoment $I_{\mathrm{a}}$ in Bezug auf eine andere im Abstand *a* zu ihr parallele Achse besteht nach dem **Steinerschen Satz** der Zusammenhang

$$I_{\mathrm{a}} = I_{\mathrm{s}} + m \cdot a^2 \ . \tag{9}$$

Der Steinersche Satz wird in der theoretischen Mechanik auch für den in der Fußnote (1) erwähnten Trägheitstensor formuliert, siehe zum Beispiel ***Landau/Lifschitz***, *Mechanik*.

1 Dies sind: Drei Trägheitsmomente $I_x$, $I_y$, $I_z$, die für ein bestimmtes körpereigenes, im Schwerpunkt gelegenes Achsensystem, mit den sogenannten Hauptachsen $\{x, y, z\}$, definiert sind, sowie drei Winkel, welche die Orientierung der Hauptachsen beschreiben. Alles zusammen bildet den Trägheitstensor.

# 2 Fragen zur Selbstkontrolle, Aufgaben und Hinweise

1) Können Sie in wenigen Sätzen den Zusammenhang von Schwingungszeiten und Trägheitsmomenten bei Drehschwingungen beschreiben?

2) Warum und wann ist es sinnvoll, statt der einfachen Masse eine so komplizierte Größe wie das Trägheitsmoment einzuführen?

3) Wozu kann der Steinersche Satz verwendet werden? Was sagt der Steinersche Satz zum Beispiel beim Fadenpendel aus?

Lassen Sie die Antworten bitte mit in das Protokoll einfließen.

## 2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße des Drehpendels

Die Winkelrichtgröße der Spiralfeder der Drehachse lässt sich sowohl statisch als auch dynamisch bestimmen. Beide Verfahren sollen verwendet und die Ergebnisse miteinander verglichen werden.

### 2.1.1 Statisches Verfahren

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße $D_\Phi$ wird Gleichung (2) verwendet. Es muss also ein Drehmoment erzeugt und die zugehörige Winkeländerung gemessen werden. Dazu zieht man am einfachsten tangential am Rand der Winkelscheibe und bestimmt die ausgeübte Kraft mit einer Federwaage. Nachteilig ist bei dieser Methode, dass die Federwaage bei jeder Winkelauslenkung eine neue Positionierung verlangt, um eine tangentiale Kraft zu erhalten. Ansonsten würde in das Drehmoment ja noch der Winkel zwischen Kraft und Hebelarm eingehen und wäre zusätzlich zu bestimmen. Zudem arbeiten Federwaagen oft ungenau.

Beide Nachteile bei Verwendung einer Federwaage lassen sich aber vermeiden, wenn man eine Anordnung gemäß Abbildung (2) verwendet.

Auf der Drehachse ist die Winkelscheibe und oberhalb dieser ein Aluminiumzylinder befestigt[2].

An der Umfangsfläche ist eine kleine Schraube eingelassen, in welche ein Schlaufe im Faden eingehängt werden kann.

Die Fadenhälften können von der Schlaufe über die

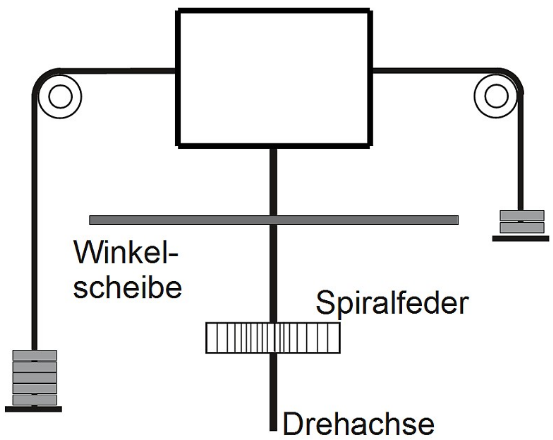


*Abbildung 2: Anordnung zur statischen Bestimmung der Winkelrichtgröße.*

2 Sie sollen die diversen Körper selbst auf die Achsen montieren. Beachten Sie dabei unbedingt die Tipps des Betreuers.

Zylinderfläche nach links und rechts über Umlenkrollen zu den Massenhaltern geführt werden. Dabei ist es möglich, die Fadenhälften in gleichem oder in entgegengesetztem Drehsinn vom Zylinder weglaufen zu lassen. In einem Fall erzeugen die linke und rechte Gesamtmasse zusammen, im anderen einander entgegengesetzt ein Gesamtdrehmoment. Sie haben die Wahl.

Dadurch, dass der Faden immer tangential abrollt, ist die Bedingung „Kraft senkrecht auf Hebelarm" für jeden Winkel automatisch gegeben, vorausgesetzt Sie haben die Rollen in der richtigen Höhe justiert. Ansonsten haben Sie wirkungslose Kraftkomponenten in Richtung der Rollenachsen.

Messen Sie die Auslenkwinkel als Funktion der wirkenden Massen. Erhöhen Sie dazu die Massen in sinnvollen Schritten, bis Sie jeweils Auslenkwinkel von $|\Phi| \approx 170\,°$ erreicht haben. Tragen Sie die Gewichtskraft $F$ in [N] als Funktion des Auslenkwinkels $\Phi$ in [rad] für beide Auslenkrichtungen in <u>ein und demselben</u> Diagramm auf, natürlich mit Fehlerbalken.

Wegen der Gleichungen (2) und (3) erwartet man eine Gerade. Es kann jedoch sein, dass Sie beim Ursprung einen Knick beobachten[3].

Berechnen Sie die Winkelrichtgröße $D_\Phi^{\text{stat}}$ aus der Steigung, bzw. für beide Steigungen, wenn ein Knick vorliegt. Im letzteren Fall berechnen Sie zusätzlich den Mittelwert von $D_\Phi^{\text{stat}}$. Ermitteln Sie den Fehler der Winkelrichtgröße aus der Grafik oder mit den Formeln der linearen Regression.

Überlegen Sie dabei, was die geeignete Einheit für $D_\Phi^{\text{stat}}$ ist, da Sie dessen Wert im nächsten Abschnitt mit von $D_\Phi^{\text{dyn}}$ vergleichen wollen.

### 2.1.2 Dynamisches Verfahren

Beim dynamischen Verfahren geht man von Gleichung (4) aus, die quadriert $T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D_\Phi}$ ergibt.

Ändert man nun $I$ und bestimmt dazu jeweils $T$, so kann aus $T(I)$ die Größe $D_\Phi$ ermittelt werden.

Die Messung kann bei großen $I$, also bei großen $T$ mit einer Stoppuhr mit hinreichender Genauigkeit erfolgen. Bei kleinen $I$ verwendet man besser die bereitliegende Gabellichtschranke. Diese ist so zu justieren, dass der Lichtstrahl der Schranke durch ein äußeres Loch des ruhenden Drehtisches führt.

Um $I$ systematisch zu ändern, geht man folgendermaßen vor: Man setzt eine Stange auf den Drehtisch, die senkrecht zur Drehachse orientiert ist. Sie werden die Stange am Arbeitsplatz leicht identifizieren können. Auf diese Stange können auf beiden Seiten kleine Metallzylinder der Masse

3 Eine Spiralfeder kann beim Auseinanderdrehen anders reagieren als beim Zusammendrehen.

$m$ aufgesteckt werden, die in bestimmten Abständen $r$ von der Drehachse in Nuten einrasten können. Man ändert nun $I$ des gesamten Systems Drehachse-Drehtisch-Stange-Zylinder, im Folgenden $I_{\text{Ges}}$ genannt, indem man $r$ beider Zylinder zusammen variiert.

$I_{\text{Ges}}$ setzt sich also aus mehreren Einzelträgheitsmomenten zusammen, $I_{\text{Ges}} = I_{\text{Sys}} + I_{\text{Zyl}} + 2mr^2$. Darin bedeuten:

$I_{\text{Sys}}$: Trägheitsmoment von Drehachse, Winkelscheibe und Stange,

$I_{\text{Zyl}}$: Trägheitsmoment der Zylinder für eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Zylinderachse. Die beiden letzten Terme folgen aus dem Steinerschen Satz.

Setzt man diesen Ausdruck in $T(I)$ ein, so folgt

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_{\text{Sys}} + I_{\text{Zyl}} + 2mr^2}{D_\Phi} . \tag{10}$$

Daraus folgt, dass man eine lineare Beziehung erhält, wenn man $T^2$ gegen $r^2$ aufträgt (sogenannte Linearisierung). Aus der Steigung kann $D_\Phi$ ermittelt werden, wenn $m$ bekannt ist. Die übrigen Größen in Gleichung (10) sind dafür ohne Bedeutung.

Vergrößern Sie den Abstand der Massen in den durch die Einrastkerben vorgegebenen Schritten und messen Sie jeweils $T$. Dabei sollen Sie je zweimal die Schwingungsdauer für zehn Schwingungen mit einer Anfangsamplitude von $\Phi \approx 180°$ messen. Bestimmen Sie $D_\Phi^{\text{dyn}}$ aus der Grafik. Vergleichen Sie mit dem Wert aus der statischen Methode, $D_\Phi^{\text{stat}}$ und kommentieren Sie den Vergleich. Legen Sie den Wert $D_\Phi^0$ fest, den Sie für die folgenden Teilaufgaben verwenden.

## 2.2 Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Probekörper

Nachdem mit einiger Sicherheit $D_\Phi^0$ bestimmt worden ist, können mittels Gleichung (4) die Trägheitsmomente einiger Körper ermittelt werden. Dazu ist aber zunächst das Trägheitsmoment des Drehtisches, d. h. im Wesentlichen das der Winkelscheibe zu messen.

### 2.2.1 Trägheitsmoment des Drehtisches

Bestimmen Sie durch Messung von $T$ der Drehschwingung des Drehtisches dessen Trägheitsmoment $I_{\text{Tisch}}$ mittels Gleichung (4). Da dieser Wert im Folgenden verwendet werden muss, sollte die Messung besonders sorgfältig durchgeführt werden.

### 2.2.2 Kugel, Scheibe, Voll- und Hohlzylinder

Die Messungen der Trägheitsmomente der genannten Körper werden analog zur gerade genannten

Messung durchgeführt. Dabei müssen Sie beim jeweils gemessenen gesamten Trägheitsmoment natürlich das des Tisches berücksichtigen.

Das Aufschrauben von Kugel und Scheibe auf die Achse erklärt sich selbst. Voll- und Hohlzylinder benötigen zusätzlich eine leichte Aufnahme aus Aluminium, die drei Bohrungen für die Stifte in den Zylindern aufweist. Das Trägheitsmoment dieser Aufnahme wird dabei vernachlässigt.

### 2.2.3 Steinerscher Satz

Befestigen Sie nun den Vollzylinder nicht-zentral auf dem Drehtisch. Eine kurze Achse liegt dafür bereit, die in die Bohrungen der Winkelscheibe eingeschraubt werden kann. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer dieser Anordnung für alle möglichen Abstände $a$ des Zylinders von der Drehachse. Verwenden Sie folgende Bezeichnung in Ihren Aufzeichnungen: $I_{\mathrm{Ges}}$ - gemessenes Gesamtträgheitsmoment und $I_{\mathrm{a}}$ - Trägheitsmoment des nicht-zentralen Zylinders.

Wählen Sie eine linearisierte Auftragung von $I_{\mathrm{a}}$ und $a$, mit der die Gültigkeit des Steinerschen Satzes leicht kontrolliert werden kann.

Versuchen Sie anhand dieses Diagramms die Masse des Zylinders und das Trägheitsmoment des Zylinders (bezogen auf die Zylinderachse, $I_{\mathrm{Zyl}} = I_{\mathrm{Sch}\perp}$) zu bestimmen. Die Werte vergleichen Sie mit dem Wiegeergebnis und dem Resultat aus dem Abschnitt (2.2.2).

### 2.2.4 Vergleich mit Trägheitsmomenten aus Masse und Abmessung

Bestimmen Sie die Massen und die relevanten Abmessungen der Probekörper (Kugel, Scheibe, Voll- und Hohlzylinder) und stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen, natürlich wie immer mit Messfehlern.

Berechnen Sie aus diesen Daten mit den Gleichungen (5), (7) und (8) die Trägheitsmomente der Probekörper und geben Sie die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle an.

Vergleichen Sie diese Werte mit den Werten, die Sie aus den Schwingungsdauern erhalten haben und nehmen Sie diese ebenfalls in der Tabelle mit auf.

Beurteilen Sie die beiden Methoden vergleichend.