Schwingungen von Federpendel und gekoppelten Pendeln

Ziele

- Untersuchung ungedämpfter freier Schwingungen
- Schwingungsdauer beim Federpendel als Funktion verschiedener Parameter
- Bestimmung der Federkonstanten auf zwei unabhängigen Wegen
- Schwingungseigenschaften gekoppelter Pendel

1 Grundlagen

Federpendel sind die vielleicht am einfachsten zu beobachtenden schwingungsfähigen Systeme. Deshalb sind sie aus keinem Praktikum wegzudenken. Kein Buch zur Experimentalphysik verzichtet auf die Aufstellung der Bewegungsgleichung und die Lösung dieser Differentialgleichung. In dieser Anleitung wird auf Herleitungen verzichtet. In den folgenden Abschnitten werden nur die für die verwendeten Pendel nötigen Zusammenhänge und Formeln angegeben. Die wichtigen physikalischen Begriffe sind unterstrichen, Sie sollen diese beherrschen.

Genaue Messungen an einfachen Pendeln zeigen auch, dass die Theorie selten mit der Praxis übereinstimmt. Eine amerikanische Lehrmittelfirma hat deshalb ein äußerst genaues Torsionspendel entwickelt, welches mit dem Slogan verkauft wird: „Taking the Pendulum out of the Theorist's Hands“. Sie sollten also darauf gefasst sein, dass die Resultate nicht immer genau den Erwartungen gemäß der Theorie entsprechen werden.

Die Eigenschaften der Schwingungen dieser Pendel können auf viele andere Systeme übertragen werden, wenn auch oft nur idealisiert. Deshalb ist wichtig, sich damit auseinanderzusetzen.

1.1 Federpendel

Bei einer idealen Feder ist die Kraft F, die erforderlich ist, um eine Längenänderung s zu bewirken, proportional zu s:

$$F = D \cdot s \text{ , } \textbf{Hookesches Gesetz} \tag{1}$$

Hängt man eine Masse m an die Feder und lenkt m um die Strecke $x = s - s_0$ aus der Ruhelage

s_0 aus und lässt sie dann los, so schwingt die Masse.

Das dynamische Kräftegleichgewicht (D'Alembertsches Prinzip) liefert die **Bewegungsgleichung**

$$m\ddot{x} + D \cdot x = 0\,. \tag{2}$$

Für die **Anfangsbedingungen**[1] $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ gilt die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\,. \tag{3}$$

Die Konstante ω_0, die Frequenz der Schwingung, hängt nur vom schwingenden System ab, es gilt $\omega_0^2 = D/m$. Daher heißt diese Frequenz[2] **Eigenfrequenz**.

Für die **Schwingungsdauer** oder **Periode** gilt daher

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\,. \tag{4}$$

Eine genauere Betrachtung zeigt (z. B. **Walcher**, *Praktikum der Physik*), dass die Masse der Feder m_F nicht vernachlässigt werden darf. Gleichung (4) ist zu ersetzen durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + 1/3\, m_\mathrm{F}}{D}}\,. \tag{5}$$

Bei etwas Nachdenken mag es vielleicht erstaunen, dass die Erdbeschleunigung g nicht in die Eigenfrequenz eingeht, obwohl bei einem frei hängenden Federpendel – wie in dem hier vorliegenden Aufbau – die Gewichtskraft die Ruheauslenkung s_0 bewirkt. Auch beim Schwingen ist die Gewichtskraft im Zusammenspiel mit der Federkraft für die Rückstellung zur Ruhelage bei s_0 verantwortlich, denken Sie nur an einen Moment, bei dem sich die Masse oberhalb der Ruhelage befindet. Dennoch taucht durch die Koordinatentransformation $x = s - s_0$ das g nicht mehr auf. Wenn Sie das Kräftegleichgewicht beim frei hängenden Federpendel zunächst mit der Koordinate s aufstellen, so sehen Sie, wie die Gewichtskraft beim Übergang auf x herausfällt.

Im Experiment kann man D statisch mittels Gleichung (1) bestimmen. Alternativ kann man D dynamisch, also mit Schwingung mittels den Gleichungen (4) und (5) messen. Dabei müssen lediglich T und m (und eventuell auch m_F) bestimmt werden, z. B. mittels einer Waage. Dies und der Vergleich beider Werte sind die Aufgaben zum Federpendel.

1.2 Physikalisches Pendel, ein Drehpendel

Im folgenden Abschnitt sollen zwei gleichartige Drehpendel durch eine schwache Feder gekoppelt

1 Entspricht Loslassen aus der Ruhe bei x_0.

2 Man nennt die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit auch Frequenz f, ω wird dann bisweilen Kreisfrequenz genannt. Bekanntlich gilt $\omega = 2\pi f$.

werden. Man verwendet hierbei zwei Metallstangen mit Messingscheiben an einem Ende (siehe Abbildung (1), die am anderen Ende drehbar aufgehängt sind. Ein solches Drehpendel wird physikalisches Pendel genannt, es ist mit dem Fadenpendel verwandt (siehe entsprechenden Versuch in diesem Praktikum). Man muss hier sinnvollerweise mit dem Trägheitsmoment und mit rückstellenden Drehmomenten arbeiten (siehe Anhang). Alle Drehpendel sind im Prinzip physikalische Pendel, das Fadenpendel ist lediglich eine spezielle Bauform, welche die genäherte Behandlung als mathematisches Pendel erlaubt (siehe ebenfalls entsprechenden Versuch in diesem Praktikum).

1.3 Elastisch gekoppelte Pendel

Betrachten wird hier den Fall zweier gleicher physikalischer Pendel 1 und 2, die über eine Feder gekoppelt sind, siehe Abbildung (1). Die Koppelfeder ist an den Stangen im Abstand l von der Drehachse befestigt.

Beide Pendel sollen ohne die Koppelfeder die gleiche Eigenfrequenz ω_0 haben. Dies ist ein wichtiges Modellsystem, welches zum Beispiel in der Festkörperphysik als Erklärungshilfe verwendet werden kann.

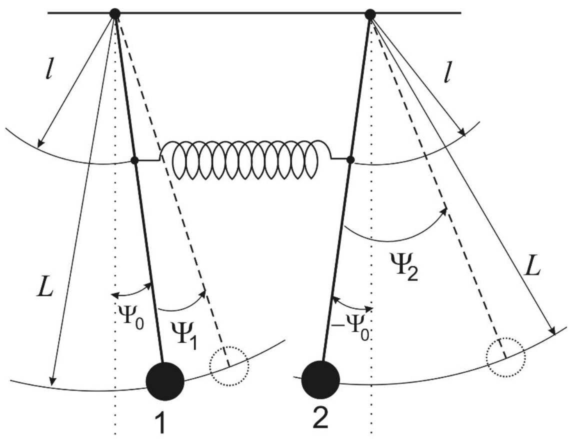

Abbildung 1: Gekoppelte Pendel. Die Drehachse ist kugelgelagert und in einem Winkelsensor integriert.

Die Bewegungen der beiden Pendel sind durch die Feder gekoppelt, d. h. das rückstellende Drehmoment des Pendels 1 hängt von der Auslenkung des Pendels 2 ab. Details zur Abbildung werden im Anhang beschrieben, ebenso die Ableitung der Bewegungsgleichungen und die Lösungen dazu.

Im Anhang wird gezeigt, dass die Lösungen für die Auslenkungswinkel $\Psi_{1,2}$ (relativ zur Ruhelage $\pm\Psi_0$) im Fall des Loslassens aus der Ruhe, aber sonst ohne Einschränkung, lauten

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{1}{2}\left[a_1\cdot\cos(\omega_a t) + a_2\cdot\cos(\omega_s t)\right] \text{ und} \\ \Psi_2(t) &= \frac{1}{2}\left[-a_1\cdot\cos(\omega_a t) + a_2\cdot\cos(\omega_s t)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Amplituden a_i sind mathematisch unbestimmte Konstanten, die durch die Anfangs-bedingungen gegeben werden. Wichtig ist das durch die Kopplung bedingte Entstehen von zwei Eigenfrequenzen ω_a und ω_s statt nur einer ω_0 der ungekoppelten Pendel.

Für die beiden Eigenfrequenzen ω_a und ω_s gelten die Beziehungen

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 + 2\,D_F\,l^2\,I^{-1} \text{ und } \omega_s = \omega_0 \text{, mit } \omega_0^2 = m\,g\,L\,I^{-1} \,. \tag{7}$$

Dabei ist D_F die Federkonstante der Koppelfeder, l eine Länge, siehe Abbildung (1), I das Trägheitsmoment eines Pendels (Messingscheibe plus Stange), m seine Masse und L der Abstand Drehpunkt – Schwerpunkt (im Bild näherungsweise in der Scheibenmitte angenommen).

Die Bedeutung von ω_a und ω_s sowie der Sinn der Indizes „a“ und „s“ wird gleich klar werden.

$\omega_s = \omega_0$ entspricht, wie erwähnt, der Eigenfrequenz der einzelnen, isolierten Pendel, daher der Index „0“. Die Gleichheit $\omega_s = \omega_0$ ist nur bei vernachlässigter Masse der Koppelfeder gültig. Die andere Eigenfrequenz, ω_a, ist nur wenig größer als $\omega_s = \omega_0$, wenn $D_F\,l^2\,I^{-1}$ klein ist.

Wenn man die Koppelfeder in Gedanken immer schwächer werden lässt ($D_F \to 0$), so erkennt man an den Gleichungen (7) sofort, dass nur noch ω_0 übrig bleibt. Gleiches gilt für $l \to 0$.

An dieser Stelle kommt die Stärke der Kopplung, gegeben durch l und D_F, ins Spiel. Das vorliegende System ist so gebaut, dass ein relativ kleines D_F, ein relativ kurzes l bei gleichzeitig großem Trägheitsmoment I der Pendel vorliegt. Diese Kopplung wird schwach genannt. Die Schwäche bewirkt, dass die beiden Eigenfrequenzen ω_a und ω_s sich nur wenig unterscheiden. Dies ist ein physikalisch wichtiger Spezialfall, der Ihnen in anderer Form sicher wieder begegnen wird, zum Beispiel in der Quantenmechanik bei der Tunnelaufspaltung.

1.3.1 Fundamentalschwingungen durch spezielle Anfangsbedingungen, Trennung von ω_a und ω_s

Wie bereits erwähnt, werden die mathematisch unbestimmten Integrationskonstanten a_1, a_2 durch die Anfangsbedingungen (AFB) festgelegt.

Man kann nun durch spezielle AFB erreichen, dass

(a) nur ω_a oder nur ω_s oder

(b) eine „Mischung“ aus beiden Frequenzen auftritt.

Die speziellen Schwingungsformen heißen (a) **Fundamentalschwingungen** und (b) **Schwebung**.

Symmetrische oder gleichsinnige Fundamentalschwingung

Werden beide Pendel auf der gleichen Seite (z. B. rechts der Mitte) vom selben Anfangswert Ψ_A aus losgelassen, so lautet die AFB folglich $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = \Psi_A$. Mit Gleichung (6) folgt $a_1 = 0$ und $a_2 = 2\,\Psi_A$, also die spezielle Lösung

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = \Psi_A \cdot \cos(\omega_s t) = \Psi_A \cdot \cos(\omega_0 t)\,. \tag{8}$$

Beide Pendel schwingen miteinander, als ob keine Kopplung vorhanden wäre, also so, wie sie auch einzeln schwingen. Nur $\omega_s = \omega_0$ taucht auf. Da die Feder inaktiv ist und ihr ja auch eine vernachlässigbare Masse zugeschrieben wurde, ist dieses Ergebnis für die symmetrische Schwingung auch ohne weiteres plausibel.

Antisymmetrische oder gegensinnige Fundamentalschwingung (Atmungsschwingung)

Werden beide Pendel auf entgegengesetzten Seiten vom selben Anfangswert $|\Psi_A|$ aus losgelassen, so lautet die AFB folglich $\Psi_1(0) = -\Psi_2(0) = |\Psi_A|$. Mit Gleichung (6) folgt $a_2 = 0$ und $a_1 = 2\Psi_A$, also die spezielle Lösung

$$\Psi_1(t) = -\Psi_2(t) = \Psi_A \cdot \cos(\omega_a t)\,. \tag{9}$$

Beide Pendel schwingen also entgegengesetzt mit gleicher Amplitude und etwas höherer Frequenz als im gleichsinnigen Fall. Letzteres ist wiederum plausibel, da jetzt die Koppelfeder ja ein zusätzliches rückstellendes Drehmoment erzeugt.

Überlagerung der Fundamentalschwingungen, die Schwebung

Mit der AFB $\Psi_1(0) = \Psi_A$ und $\Psi_2(0) = 0$ erhält man $a_1 = a_2 = \Psi_a$. Dadurch können die Kosinusfunktionen nach den bekannten Theoremen addiert werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \Psi_A \cdot \cos\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2}\, t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2}\, t\right) = \Psi_A \cos(\omega_{SCH} t) \cdot \cos(\omega_m t) \text{ und} \\ \Psi_2(t) &= \Psi_a \cdot \sin\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2}\, t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2}\, t\right) = \Psi_a \cdot \sin(\omega_{SCH} t) \cdot \sin(\omega_m t)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

mit den hier definierten Frequenzen

$$\omega_{SCH} = (\omega_a - \omega_s)/2 \text{ und } \omega_m = (\omega_a + \omega_s)/2\,. \tag{11}$$

Wie bereits mehrfach erwähnt, nimmt wegen der schwachen Kopplung die Frequenz ω_{SCH} relativ kleine Werte an, während die mittlere Frequenz ω_m zwischen den fast gleichen Frequenzen der Fundamentalschwingungen liegt.

Die ersten beiden Faktoren in den Gleichungen (10), $\Psi_A \cdot \cos(\omega_{SCH} t)$ und $\Psi_A \cdot \sin(\omega_{SCH} t)$, können als „langsam veränderliche Amplitude“ der „schnellen“ Funktionen $\cos(\omega_m t)$ bzw. $\sin(\omega_m t)$ angesehen werden. ω_{SCH} wird **Schwebungsfrequenz** genannt.

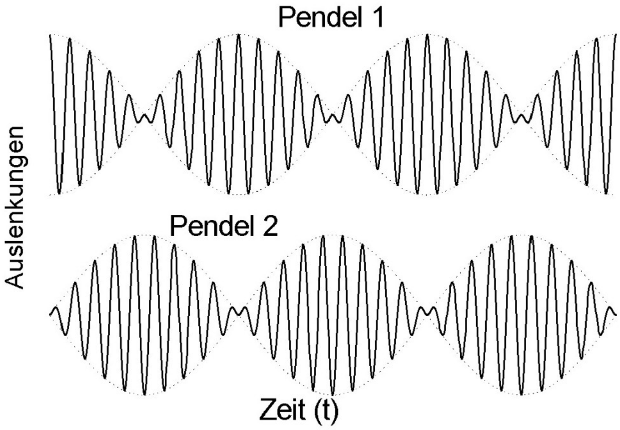

Abbildung 2: Zeitverhalten der Pendelauslenkungen bei der Schwebung.

Die Auslenkungen Ψ_1 und Ψ_2 verhalten sich wie in Abbildung (2) dargestellt. Man erkennt insbesondere den Phasenwechsel bei jedem Stillstand, der dadurch entsteht, dass $\Psi_A \cdot \cos(\omega_{SCH} t)$ bzw. $\Psi_A \cdot \sin(\omega_{SCH} t)$ das Vorzeichen wechselt.

Alles obige gilt nur, wenn ω_0 beider Pendel gleich sind – eben gekoppelte gleiche Pendel vorliegen!

Ein Ziel des Versuchs besteht nun klarerweise darin, mit den gemessenen Frequenzen der Fundamentalschwingungen ω_a und ω_s die Zusammenhänge mit ω_{SCH} und ω_m nach Gleichung (11) zu verifizieren.

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 Federpendel

Zur Messung von T und D als Funktion von m verwendet man einen Aufbau gemäß Abbildung (3).

An der Feder hängt ein Halter (Masse m_H). Der Halter kann Zusatzmassen aufnehmen.

Am senkrecht anzubringenden Maßstab kann ein Zeiger verschoben werden, der zur Messung der statischen Auslenkung nützlich ist.

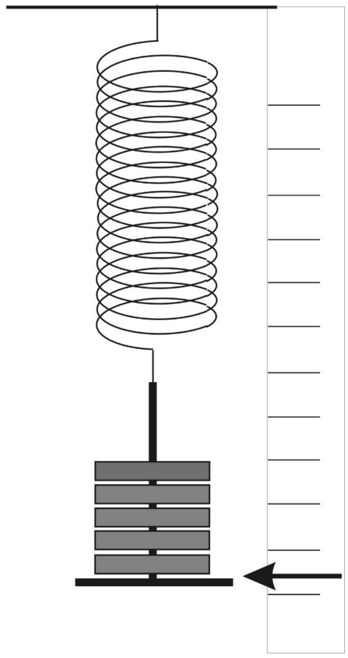

Abbildung 3: Aufbau zum Federpendel.

2.1.1 Statische Messung der Federkonstanten

Messen Sie für eine weiche und eine härtere Feder die Federkonstante D_{stat} aus der statischen Auslenkung bei verschiedenen Massen. Führen Sie eine grafische Auswertung oder eine lineare Regression durch (Steigungsbestimmung).

Ebenfalls aus der Grafik bzw. Regression ist die Messgenauigkeit für D_{stat} zu ermitteln. Natürlich sind Messwerte und Ausgleichsgerade grafisch darzustellen.

Hinweis: Wenn Sie die bunten, ziemlich harten Federn verwenden, dürfen Sie nicht mit den Massen sparen. Bei weichen Federn jedoch bitte dieselben nicht überdehnen.

2.1.2 Dynamische Messung der Federkonstanten

Messen Sie die Schwingungsdauern beider Federn für mindestens 5 unterschiedliche Massen mit einer Stoppuhr, wobei Sie die Zeit für mindestens zehn Schwingungen messen sollten. Tragen Sie T^2 gegen die Massen auf und bestimmen Sie grafisch oder per linearer Regression D_{dyn} und die Masse der Feder m_F nach Gleichung (5). Ebenso erfolgt die Bestimmung der Messgenauigkeit.

Wiegen Sie die Feder zum Vergleich mit der Digitalwaage beim Versuch „Kalorimetrie“.

2.1.3 Ergebnisvergleich

Vergleichen Sie die Ergebnisse für die Federkonstanten übersichtlich in einer Tabelle. Gleiches gilt für die Federmassen.

2.2 Gekoppelte Pendel

Die Messung der Auslenkungswinkel Ψ_1 und Ψ_2 als Funktion der Zeit übernehmen zwei Bewegungssensoren in Verbindung mit einem PC. Der Umgang mit dem Mess- und Auswertungsprogramm „Datastudio" sollte mit ausliegender Anleitung kein Problem darstellen.

2.2.1 Ungekoppelte Einzelpendel

Zur Messung der Fundamentalschwingungen und der Schwebung stehen zwei Pendel (dünne Stahlstange mit geringfügig verschiebbarem Messinggewicht) zur Verfügung, die in Kugellagern gelagert sind und daher bei vorsichtigem Anstoßen in einer Ebene schwingen. Hängen Sie die beiden Pendel in einem Abstand von etwa 30 cm auf, dann ist die später einzuhängende Koppelfeder gut gespannt.

Kontrollieren Sie zunächst, ob beide Pendel gleiche Schwingungsdauern haben, die Abweichung soll kleiner als 0,4 ms sein. Die Messung und Auswertung erfolgt mit dem Messprogramm „Datastudio". Geben Sie die Schwingungsdauer $T_0 \pm \Delta T_0$ an. Richten Sie ggf. beide Pendel durch Verschieben der Massen auf die gleiche Schwingungsdauer T_0 ein. Die Pendelscheiben lassen sich durch Verstellen der unteren Mutter stufenlos in der Höhe verstellen. Dazu lösen Sie die oberen Kontermuttern und ziehen diese danach (mit Gefühl) wieder an (wichtig, warum?).

2.2.2 Gekoppelte Einzelpendel

Hängen Sie die Kopplungsfeder ein. Der Abstand l zwischen Dreh- und Koppelpunkt soll an beiden Pendeln gleich sein und ungefähr 45 cm betragen, siehe Abbildung (1).

Bestimmen Sie zunächst ω_a und ω_s, indem Sie die Fundamentalschwingungen anstoßen und je zweimal die Schwingungsdauern aus einer Aufzeichnung von ca. 15 Schwingungen bei kleinen Amplituden messen.

Im Fall der <u>antisymmetrischen Schwingung</u> binden Sie beide Pendel unterhalb der Messingscheiben mit einem Faden so zusammen, dass der Abstand zwischen den Scheiben etwa 15 cm entspricht. Das Ganze muss nun zur Ruhe kommen, helfen Sie ggf. mit der Hand vorsichtig nach. Anschließend brennen Sie den Faden durch und starten anschließend die Messung am PC. Die Ermittlung von T_a erfolgt mit „Datastudio". Ist T_a wirklich kleiner als T_0?

Im Fall der <u>symmetrischen Schwingung</u> verwenden Sie das auf dem Boden stehende Stativmaterial mit den schwarzen Anschlagblöcken. Legen Sie beide Blöcke beim ruhenden Pendel vorsichtig an den Stangen jeweils auf der gleichen Seite an. Lassen Sie dabei das Pendel in der Ruhelage. Nun bewegen Sie bei festem Blockabstand das ganze Stativ weg und geben die beiden Pendel gleichzeitig frei. Die Messung und Ermittlung von T_s erfolgt wieder mit „Datastudio".

Als nächstes stoßen Sie die Schwebung entsprechend den geschilderten Anfangsbedingungen an, $\Psi_1(0) = \Psi_a; \Psi_2(0) = 0$. Achten Sie dabei besonders darauf, dass $\Psi_2(0) = 0$ im Experiment bedeutet, dass ein Pendel am Ort der Ruhelage bleiben muss, während das andere auf Ψ_A gebracht wird.

Die Bedingung $\Psi_1(0) = \Psi_A; \Psi_2(0) = 0$ ist nicht einfach zu realisieren. Man kann zu zweit arbeiten: Eine Person hält ein Pendel in der Ruhelage fest, während die andere das zweite Pendel auslenkt; dann lassen beide gleichzeitig los. Ggf. kann dies auch eine beidhändig agierende Person auch alleine. Besser ist es, auch hier mit dem Stativ mit den Anschlagblöcken zu arbeiten.

Die Auswertung der Schwebungskurven mit „Datastudio" ist nicht ganz einfach, bitte fragen Sie beim Versuchsbetreuer nach, falls Sie mit der ausliegenden Anleitung nicht zurechtkommen. Das Programm wird T_{SCH} und T_m liefern.

Geben Sie die diversen Kreisfrequenzen mit Fehlern übersichtlich in einer Tabelle an.

Vergleichen Sie mit den Erwartungswerten aus den oben angeführten Gleichungen:

Stimmt ω_0 (ungekoppelt) mit ω_s (symmetrisch) im Rahmen der Messgenauigkeit überein?

Ist ω_a (antisymmetrisch) wirklich größer als ω_s ?

Gilt $\omega_{SCH} = (\omega_a - \omega_s)/2$ und $\omega_m = (\omega_a + \omega_s)/2$ im Rahmen der Messgenauigkeiten?

Anhang

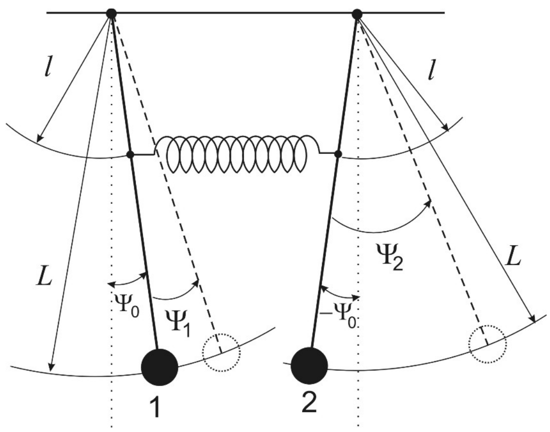

Abbildung 4: Gekoppelte Pendel.

Es wird der Fall zweier gleicher physikalischer Pendel 1 und 2 betrachtet, die über eine Feder gekoppelt sind, siehe Abbildung (4). Wegen der Federkopplung sind die Ruhelagen nicht mit den Vertikalen identisch, sondern um einen Winkel $|\Psi_0|$ nach innen verschoben. Wie das s_0 beim Federpendel wird auch der Winkel $|\Psi_0|$ in den Eigenfrequenzen nicht auftauchen, er bleibt aber der Vollständigkeit halber zunächst bestehen.

Für die Vorzeichen der Winkel wird die übliche mathematische Konvention verwendet.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen betrachtet man die Drehmomente, die an den Pendeln angreifen und die von der Koppelfeder und der Schwerkraft erzeugt werden.

In der Ruhelage sind die durch die Feder erzeugten Drehmomente $M_{\mathrm{F},0} = -D_{\mathrm{F}} x_0 l$ den durch die Schwerkraft erzeugten Drehmomenten $M_{\mathrm{S}.0} = m\,g\,L\,\Psi_0$ entgegen gerichtet und von gleicher Größe.[3]

Dabei ist *m* die Gesamtmasse von Stange und angehängter Masse und *L* ist der Abstand Drehpunkt-Schwerpunkt, etwa gleich der in Abbildung (4) dargestellten Länge. Beim Ausdruck für $M_{\mathrm{S},0}$ wurde die Kleinwinkelnäherung (siehe Versuch „Fadenpendel und Reversionspendel“ oder Lehrbuch) angewendet.

Also gilt im Gleichgewicht (Ruhelage)

$$m\,g\,L\,\Psi_0 - D_{\mathrm{F}}\,x_0\,l = 0\,. \tag{12}$$

Dabei beschreiben x_0 die Längenänderung der Feder gegenüber dem entspannten Zustand und D_{F} die Federkonstante.

Man denkt sich nun Pendel 1 um Ψ_1 und Pendel 2 um Ψ_2 aus der Ruhelage ausgelenkt. Dann ändert sich das rücktreibende Drehmoment von Pendel 1 zu $-m\,g\,L(\Psi_0 + \Psi_1)$, und die Feder liefert den Beitrag $D_{\mathrm{F}}\,x_0\,l + D_{\mathrm{F}}\,l^2(\Psi_2 - \Psi_1)$. Der letzte Term kommt daher, dass die Federauslenkung gleich $l(\Psi_2 - \Psi_1)$ ist.

3 Die Drehmomente haben nur eine Vektorkomponente senkrecht zur Drehebene. Es wird daher nur diese Komponente angegeben.

Bewegungsgleichungen und deren allgemeine Lösung

Das gesamte wirkende Drehmoment bei Pendel 1 lautet also

$$M_1 = -m\,g\,L(\Psi_0 + \Psi_1) + D_\mathrm{F}\,x_0\,l + D_\mathrm{F}\,l^2(\Psi_2 - \Psi_1)\,,$$

was sich wegen der Ruhelagenbedingung (12) reduziert auf

$$M_1 = -m\,g\,L\,\Psi_1 - D_\mathrm{F}\,l^2(\Psi_1 - \Psi_2)\,.$$

Beim Pendel 2 erhält man entsprechend

$$M_2 = -m\,g\,L\,\Psi_2 + D_\mathrm{F}\,l^2(\Psi_1 - \Psi_2)\,.$$

Wie schon beim Federpendel ist die Koordinate der Ruhelage aus den Gleichungen verschwunden. Das Trägheitsmoment I beider Pendel sei gleich und werde als unbekannter Parameter behandelt. Damit ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen (gekoppelte Differentialgleichungen, DGL)

$$\begin{aligned} I\,\ddot{\Psi}_1 &= -m\,g\,L\,\Psi_1 - D_\mathrm{F}\,l^2(\Psi_1 - \Psi_2) \text{ und} \\ I\,\ddot{\Psi}_2 &= -m\,g\,L\,\Psi_2 + D_\mathrm{F}\,l^2(\Psi_1 - \Psi_2)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Die DGL heißen bekanntlich deswegen gekoppelt, weil jede von ihnen <u>beide</u> Koordinaten Ψ_1 und Ψ_2 enthält. Es ist Ihnen vielleicht schon bekannt, dass die Substitution $\Phi_1 = \Psi_1 - \Psi_2$ und $\Phi_2 = \Psi_1 + \Psi_2$ die Gleichungen entkoppelt. Die entstehenden DGL können nun wieder anhand der Ansätze im ersten Abschnitt gelöst werden.

Nach Rücktransformation zu den Variablen Ψ_i finden sich die allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{1}{2}\left[\,a_1\cdot\cos(\omega_\mathrm{a}t) + a_2\cdot\cos(\omega_\mathrm{s}t) + b_1\cdot\sin(\omega_\mathrm{a}t) + b_2\cdot\sin(\omega_\mathrm{s}t)\right] \text{ und} \\ \Psi_2(t) &= \frac{1}{2}\left[-a_1\cdot\cos(\omega_\mathrm{a}t) + a_2\cdot\cos(\omega_\mathrm{s}t) - b_1\cdot\sin(\omega_\mathrm{a}t) + b_2\cdot\sin(\omega_\mathrm{s}t)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Dabei gelten für die beiden hier auftauchenden Eigenfrequenzen ω_a und ω_s die Beziehungen

$$\omega_\mathrm{a}^2 = \omega_0^2 + 2\,D_\mathrm{F}\,l^2\,I^{-1} \text{ und } \omega^2 = \omega_0^2\text{, mit } \omega_0^2 = m\,g\,L\,I^{-1}\,. \tag{7}$$

Bei diesem Versuch soll immer nur der „Start aus der Ruhe" betrachtet werden, $\dot{\Psi}_1(0) = \dot{\Psi}_2(0) = 0$. Damit verschwinden b_1 und b_2, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{1}{2}\left[a_1\cdot\cos(\omega_\mathrm{a}t) + a_2\cdot\cos(\omega_\mathrm{s}t)\right] \text{ und} \\ \Psi_2(t) &= \frac{1}{2}\left[-a_1\cdot\cos(\omega_\mathrm{a}t) + a_2\cdot\cos(\omega_\mathrm{s}t)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Es bleiben noch zwei Integrationskonstanten a_1 und a_2 übrig, die man durch spezielles Anwerfen der Schwingungen weiter einschränken kann – siehe Kapitel 2.2.2.